

文章编号: 1000-8055(2009)12-83-08

计算气动声学中的高精度紧致差分格式研究

柳占新, 黄其柏, 胡 漂, 袁骥轩

(华中科技大学 机械学院, 武汉 430074)

摘 要: 优化了五对角紧致差分格式. 通过 Fourier 分析, 将优化目标转化为一个求带有约束的多元非线性函数的最小值问题, 利用序列二次规划 (SQP) 方法获得最佳系数. 通过三种措施保证优化的格式具有高精度和分辨率: ①直接对量化波数误差积分求其最小值; ②采用绝对误差准则, 使各种波长的波具有同一误差限; ③优化的波数空间和精确求解区间一致. 通过调整内部和边界格式的 Taylor 精度及误差限, 保证整个格式的稳定性, 并从理论上证明了优化格式具有渐进稳定性. 一维和二维基准算例体现了优化格式的性能改进.

关 键 词: 紧致格式; 有限差分格式; 序列二次规划方法; 计算气动声学; 渐进稳定性

中图分类号: V211.3

文献标识码: A

Study on the high-accuracy compact-finite-difference schemes for computational aeroacoustics

LIU Zhan-xin, HUANG Qi-bai, HU Li, YUAN Ji-xuan

(College of Mechanical Engineering,

Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: The optimized pentadiagonal compact finite difference schemes were presented in this paper. Through Fourier analysis, the optimization object was converted to find the minimum of a nonlinear multi-variable function with multi-constraint. The advanced sequential quadratic programming (SQP) method was employed to find the minimum. In order to obtain high accuracy and resolution, the following strategies were applied: (1) the minimum is computed directly from integral errors of the scaled wavenumbers; (2) absolute error criterion is used for evaluating the deviation between effective and exact wavenumbers, and the waves with different wavelengths have the same error limit under this criterion; (3) the wavenumber domain for optimization is identical with the well-resolved domain. The asymptotical stability of the schemes is satisfied by adjusting the Taylor accuracy and error limits, and proved through the theoretical analysis. The increased performances of the optimized schemes are demonstrated through application to benchmark problems.

Key words: compact schemes; finite difference schemes; sequential quadratic programming; computational aeroacoustics; asymptotical stability

计算气动声学 (Computational aeroacoustics, CAA) 是近十几年发展起来的以气动声学和计算流体力学为基础的新兴科学. 一般来讲气动声学中的问题大多是时变的, 并且声音的频率较

高. 因此与流体力学和空气动力学中的数值模拟方法相比, 气动声学的数值模拟方法有着更严格的要求: 需要支持声波、涡波和熵波等三种波; 满足低色散、低耗散和各向同性. 为此已有很多学者

收稿日期: 2007-12-04; 修订日期: 2008-05-18

基金项目: 国家自然科学基金 (50075029)

作者简介: 柳占新 (1980-), 男, 湖北恩施人, 博士生, 主要从事噪声控制和计算气动声学方面的研究.

致力于 CAA 的算法研究,如 Tam 等人提出了色散相关保持 (Dispersion-relation-preserving, DRP) 差分格式^[1],Svard 等人提出了高阶稳定差分格式^[2],Hu 等人提出了低耗散低色散龙格库塔 (Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta, LDDRK) 格式^[3],Berland 等人优化了一系列显示有限差分格式和 Runge-Kutta 格式^[4].

由于既具有一般差分格式的稳健性又具有谱方法的高精度,紧致差分格式在计算气动声学中有着广泛的应用,也是一个研究的热点.如 Lele^[5]改写 Padé 型差分格式,Stumann 提出了求解 Helmholtz 方程的六阶紧致差分格式^[6],Kim & Lee 利用 DRP 格式的基本思想优化了 Lele 的改进格式^[7]并构造了数值边界格式^[8].最近 Kim 利用插值方法对原来的方法进行了再次优化^[9].虽然 Kim 的格式与 Lele 的相比计算精度有显著提高,但仍然不满足渐进稳定性要求^[10].本文在 Kim & Lee 的基础之上,进一步优化了紧致差分格式,使其计算精度和分辨率进一步提高;然后从理论上证明了优化格式满足渐进稳定性条件;最后通过实例说明优化后的格式比 Kim 最新优化格式^[9]有更高的精度.

1 内部紧致差分格式

五对角的紧致差分格式可以写为

$$\beta_i' f_{i-2} + \alpha_i' f_{i-1} + f_i + \alpha_i' f_{i+1} + \beta_i' f_{i+2} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x} + c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6\Delta x} \quad (1)$$

式中 f' 表示函数 f 的空间一次微分; Δx 和 j 分别为网格步长和网格标号; α, β, a, b, c 为常系数.虽然这些系数可以通过将等式(1)左右两边同时 Taylor 展开确定,但是 Taylor 精度只能说明数值解对准确解的收敛率,并不能保证较高的计算精度.

对式(1)进行 Fourier 变换可以得到

$$I_k (\beta e^{-2ik\Delta x} + \alpha e^{-ik\Delta x} + 1 + \alpha e^{ik\Delta x} + \beta e^{2ik\Delta x}) \tilde{f} = (a \frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2\Delta x} + b \frac{e^{2ik\Delta x} - e^{-2ik\Delta x}}{4\Delta x} + c \frac{e^{3ik\Delta x} - e^{-3ik\Delta x}}{6\Delta x}) \tilde{f} \quad (2)$$

式中 $I = \sqrt{-1}$, k 为波数.令 $\omega = k\Delta x$,称为量化的波数,其取值范围为 $[0, \pi]$,可以将式(2)化简为

$$\bar{\omega} = \frac{a \sin(\omega) + (b/2) \sin(2\omega) + (c/3) \sin(3\omega)}{1 + 2\alpha \sin(\omega) + 2\beta \sin(2\omega)} \quad (3)$$

其中 $\bar{\omega}$ 为差分格式的实际量化波数(也作修正量化波数).实际量化波数和准确值的偏差是产生数值色散误差的主要原因.为了提高紧致差分格式的精度 $\bar{\omega}$ 就应充分近 ω .但从式(3)可以看出,无论差分格式的系数如何选取,当 $\omega = \pi$ 时 $\bar{\omega} \equiv 0$,此时色散误差最大.

为了衡量 $\bar{\omega}$ 与 ω 的近似程度通常采用如下相对误差准则

$$\frac{|\bar{\omega} - \omega|}{\omega} \leq \varepsilon \quad (4)$$

满足式(4)的 ω 的范围称为精确求解度量波数区间,精确区间越大差分格式的分辨率越高.这种误差准则导致长波比短波有着更严格的误差限.但在计算中,对于同样的空间间隔,长波度量波数比短波要小,更容易满足误差准则.因此,这种误差准则过度强调长波精度而影响了短波的精度导致整个格式的分辨率低.为此本文定义如下绝对误差准则

$$\frac{|\bar{\omega} - \omega|}{\pi} \leq \varepsilon \quad (5)$$

在此误差准则下,任何波长的波都具有同一误差限.从而可以最大限度的提高格式的分辨率.

优化的目的就是在满足误差准则的前提下找出差分格式的系数使得精确求解度量波数区间尽可能的大.为此定义以下积分

$$E = \int_0^{\pi r} (\bar{\omega} - \omega)^2 d\omega \quad (6)$$

式中 πr ($r \in [0, 1]$) 为精确求解区间的上限, r 越大差分格式的分辨率越高.将式(3)代入式(6)可得

$$E = \int_0^{\pi r} \left[\omega - \frac{a \sin(\omega) + (b/2) \sin(2\omega) + (c/3) \sin(3\omega)}{1 + 2\alpha \sin(\omega) + 2\beta \sin(2\omega)} \right]^2 d\omega \quad (7)$$

为了使式(7)便于积分, Kim 和 Lee 引入一个权函数将其变为

$$E' = \int_0^{\pi r} [\omega(1 + 2\alpha \sin(\omega) + 2\beta \sin(2\omega)) - a \sin(\omega) + (b/2) \sin(2\omega) + (c/3) \sin(3\omega)]^2 d\omega \quad (8)$$

计算出式(8)的积分后再分别对各个系数求导而得到优化的系数.这样虽然便于求解但由于 E' 与 E 存在差异,使式(8)取最小值的系数并不能保证式(7)也取得最小值.这样不能找出最佳系数.

实际上从式(7)可以看出 E 是关于 X ($X = [a, b, c, \alpha, \beta]$) 和积分上限 r 的函数.对于给定的 r 和 X 式(7)的积分计算则可以通过 Gauss 数值积

分方法求得.如果把 r 固定,则求式(7)的最小值可以转化为一个带有约束的优化问题.其中的约束有线性约束——满足一定的 Taylor 精度,也有非线性约束——满足绝对误差准则.可以通过序列二次规划(Sequential quadratic programming, SQP)方法^[11]找出局部最佳 X (即当 r 为某一常数时的最佳 X ,用 $\hat{X}$ 表示).此时 $[0, \pi]$ 既是优化的度量波数空间也是精确求解区间,这样可以最大限度的提高格式的分辨率. $r_{\max}$ 和全局最优 X (即整个波数空间上的最佳值,用 X_{opt} 表示)可以通过从小到大的等步长 (δr) 搜索得到.优化流程如图 1 所示.

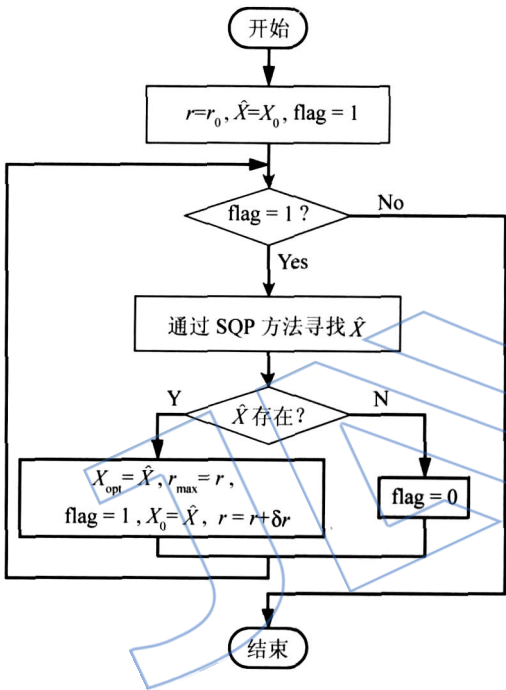


图 1 优化流程图

Fig. 1 Flowchart of the optimization

优化过程中,绝对误差限 ε 设为 2×10^{-4} ,这比以前任何优化格式都要严格,足以保证计算的精度.为了保证格式的收敛性,优化的内部格式具有四阶 Taylor 精度.

优化后的系数如表 1 所示.优化以后 $r_{\max}$ 达到 0.7856,也就是说计算中每个波长只要 2.55 个网格点.而 Kim^[9] 的优化格式在误差限为 2×10^{-4} 时 $r_{\max}$ 只有 0.4603,计算中每个波长至少要 5.6 个点.显然本文的优化格式大大提高了差分格式的分辨率.优化后的色散误差 ($|\omega - \bar{\omega}|$) 如图 2 所示.从图 2 也可以看出,优化后的格式精度有显著提高.

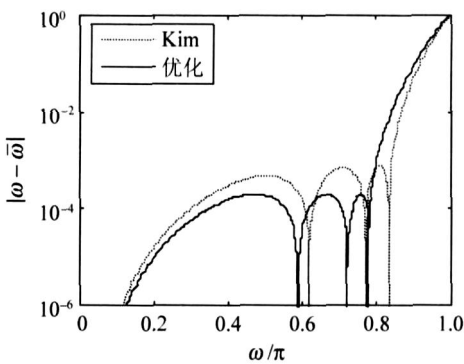


图 2 内部差分格式色散误差对比图

Fig. 2 Dispersive error comparison of interior difference schemes

表 1 内部差分格式优化系数

Table 1 Optimized coefficients of interior difference scheme

系数	a	b	c
优化值	1.3069171114	0.9828406281	0.0356295405
系数	α	β	
优化值	0.5747612151	0.0879324249	

2 边界紧致差分格式

如果将一维的计算域均分成 N 个区间,在不用周期边界的情况下式(1)只能运用在 $3 \leq i \leq N - 3$ 的网格点上,为了将偏微分方程在空间全部离散,边界点处采用以下不对称格式

$$\sum_{m=0}^4 a_{im} f'_i = \frac{1}{\Delta x_n} \sum_{n=1}^6 p_{in} (f_n - f_i)$$
$$\sum_{m=0}^4 a_{im} f'_{N-m} = - \frac{1}{\Delta x_n} \sum_{n=1}^6 p_{in} (f_{N-n} - f_{N-i}) \quad (9)$$

式中 a_{im} 和 p_{in} 为系数, $i = 0, 1, 2$. 将以上两式在各点展开刚可得到一个线性方程组,为了使整个系统保持五对角形式,令 $a_{00} = a_{11} = a_{22} = 1, a_{03} = a_{04} = a_{14} = 0$. 同内部格式一样,对式(9)进行 Fourier 变换可以得到修正的量化波数如

$$\bar{\omega} = -I \frac{\sum_{n=1}^6 p_{in} e^{i\omega(n-1)}}{\sum_{m=0}^4 a_{im} e^{i\omega(m-1)}} \quad (10)$$

与式(3)相比式(10)更复杂,是一个复数. $\bar{\omega}$ 与 ω 偏差的实部代表色散误差虚部代表耗散误差.为了保证计算精度,不仅需要 $\bar{\omega}$ 的实部充分接近 ω ,还需保证其虚部充分接近零.故优化的目标应该是使如下误差函数的积分最小

$$E = \int |\omega - \bar{\omega}|^2 d\omega \tag{11}$$

同时要保证色散和耗散误差在允许范围内, 即满足如下绝对误差准则

$$\frac{|\operatorname{Re}[\bar{\omega} - \omega]|}{\pi} \leq \varepsilon, \quad \frac{|\operatorname{Im}[\bar{\omega}]|}{\pi} \leq \varepsilon \tag{12}$$

与内部格式一样, 可以用 SQP 优化方法结合等步长搜索得到最佳系数. 优化过程中发现内部和边界格式的 Taylor 精度, 误差限都对整个格式的稳定性有影响. 为了使边界格式和内部格式具有相当的分辨率, 同时考虑到整个格式的稳定性, 优化过程中所有边界格式都降为三阶 Taylor 精度; 边界点 $i = 0, 1$ 和 2 处误差限分别设为 5×10^{-4} , 2×10^{-4} 及 1×10^{-3} .

优化后的系数如表 2 所示. 在相应的误差准则下, 精确求解每个波长需要的最少网格点数如表 3 所示. 从表 3 可以看出: 所有边界格式中每个波长需要的最少点数与内部格式 (2.55) 相差不多, 要比 Kim^[9] 格式需要的网格数少得多, 分辨率大幅提高. 每个边界点的计算误差如图 3~图 5 所示, 从这些图中可以看出, 优化的边界差分格式的绝对误差都在相应的误差限范围内. 同时在 $k\Delta x \leq 0.5\pi$ (长波) 范围内, 优化格式的色散和耗散误差要比 Kim 格式略大. 正如本文第二部分所分析一样, 没有必要过度强调长波的精度, 重点应该放在精确求解范围内的短波 ($k\Delta x$ 约为 $0.5\pi \sim 0.8\pi$) 上, 而在这个范围内, 优化格式的误差要比 Kim 格式小得多.

表 2 边界格式优化系数

系数	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$
a_{i0}	1	0.1023343303	0.0347468867
a_{i1}	9.4133049605	1	0.4064246796
a_{i2}	10.7741034803	1.8854940182	1
a_{i3}	0	0.8582327249	0.7683583302
a_{i4}	0	0	0.1623349133
p_{i0}	-3.6882535853	0.3586079596	-0.1274311870
p_{i1}	-10.3169611301	-1.3424668425	-0.6299599564
p_{i2}	9.6807767746	0.0834751059	-0.3024922988
p_{i3}	5.4529053045	1.4235697122	0.6498856630
p_{i4}	-1.5191959829	0.2245783548	0.3919470424
p_{i5}	0.4834876759	-0.0358453729	0.0189402158
p_{i6}	-0.0927590566	0.0052970021	-0.0008894789

表 3 在相应误差准则下每个波长需要的最少网格点数
Table 1 Minimum grids per wavelength of boundary schemes within corresponding error tolerances

格式	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$
Kim	3.92	4.97	4.74
HAMR	2.87	2.59	2.59

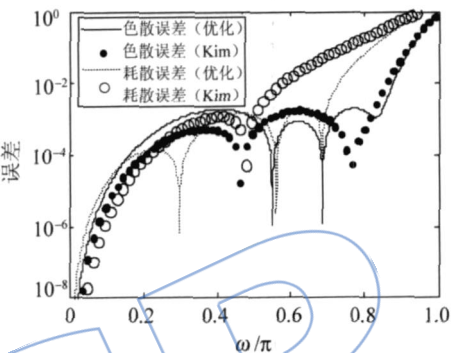


图 3 边界点 $i = 0$ 处差分格式误差对比图
Fig. 3 Computation error comparison of the schemes at boundary point $i = 0$

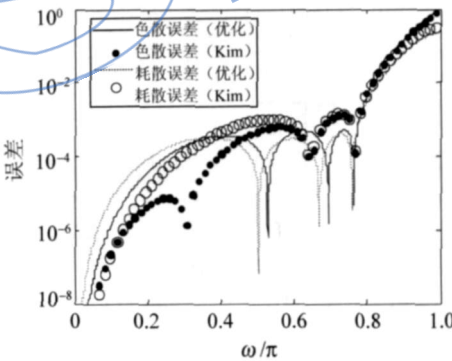


图 4 边界点 $i = 1$ 处差分格式误差对比图
Fig. 4 Computation error comparison of the schemes at boundary point $i = 1$

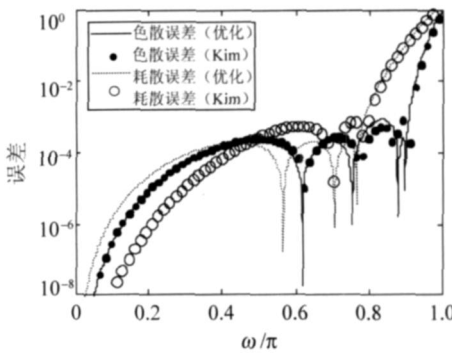


图 5 边界点 $i = 2$ 处差分格式误差对比图
Fig. 5 Computation error comparison of the schemes at boundary point $i = 2$

3 稳定性分析

考虑一维平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

如果将计算区域等分成 N 份,相邻网格节点间隔为 Δx . 将 $\partial u / \partial x$ 在边界点按式(9)展开,内部点用式(1)展开,可得

$$\frac{dU^+}{dt} = - (A^+)^{-1} P^+ U^+ \quad (14)$$

其中

$$U^+ = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N)' \quad (15)$$

$$A^+ =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & & & & \\ a_{10} & 1 & a_{12} & a_{13} & & & 0 \\ a_{20} & a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} & & \\ 0 & \beta & a & 1 & a & \beta & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta & a & 1 & a & \beta \\ & & & & a_{24} & a_{23} & 1 & a_{21} & a_{20} \\ 0 & & & & a_{13} & a_{12} & 1 & a_{10} & \\ & & & & & a_{02} & a_{01} & 1 & \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$P^+ = \frac{c}{\Delta x} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} & p_{05} & p_{06} & & & \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} & & & 0 \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} & & & \\ -c/6 & -b/4 & -a/2 & 0 & a/2 & b/4 & c/6 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -c/6 & -b/4 & -a/2 & 0 & a/2 & b/4 & c/6 \\ & & & & -p_{36} & -p_{35} & -p_{34} & -p_{33} & -p_{32} & -p_{31} & -p_{30} \\ 0 & & & & -p_{16} & -p_{15} & -p_{14} & -p_{13} & -p_{12} & -p_{11} & -p_{10} \\ & & & & -p_{06} & -p_{05} & -p_{04} & -p_{03} & -p_{02} & -p_{01} & -p_{00} \end{bmatrix} \quad (17)$$

显然 U^+ 为 $N+1$ 维列向量, A^+ 和 P^+ 为 $(N+1) \times (N+1)$ 矩阵. 如果求解式(13)给定如下边界和初始条件(初始边界值问题)

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = g(t) \end{cases} \quad (18)$$

则式(14)可以改写成

$$\frac{dU}{dt} = - (A)^{-1} P U + B g(t) \quad (19)$$

其中

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, u_N)' \quad (20)$$

$$A =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & & & & \\ \bar{a}_{21} & 1 & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{24} & & & 0 \\ \beta & a & 1 & a & \beta & & \\ 0 & \beta & a & 1 & a & \beta & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta & a & 1 & a & \beta \\ & & & & a_{24} & a_{23} & 1 & a_{21} & a_{20} \\ 0 & & & & a_{13} & a_{12} & 1 & a_{10} & \\ & & & & & a_{02} & a_{01} & 1 & \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$P = \frac{c}{\Delta x} \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} & \bar{p}_{13} & \bar{p}_{14} & \bar{p}_{15} & \bar{p}_{16} & & & & \\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} & \bar{p}_{23} & \bar{p}_{24} & \bar{p}_{25} & \bar{p}_{26} & & & & 0 \\ -b/4 & -a/2 & 0 & a/2 & b/4 & c/6 & & & & \\ -c/6 & -b/4 & -a/2 & 0 & a/2 & b/4 & c/6 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -c/6 & -b/4 & -a/2 & 0 & a/2 & b/4 & c/6 \\ & & & & -p_{36} & -p_{35} & -p_{34} & -p_{33} & -p_{32} & -p_{31} & -p_{30} \\ 0 & & & & -p_{16} & -p_{15} & -p_{14} & -p_{13} & -p_{12} & -p_{11} & -p_{10} \\ & & & & -p_{06} & -p_{05} & -p_{04} & -p_{03} & -p_{02} & -p_{01} & -p_{00} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$B = -A^{-1}(b_1, b_2, b_3, 0, \dots, 0)$$

U 和 B 为 N 维列向量, A 和 P 为 $N \times N$ 矩

阵. B、A 和 P 的系数由以下等式计算

$$b_1 = \frac{a_{10} p_{00} - p_{10}}{1 - a_{10} a_{01}}, b_2 = \frac{a_{20} p_{00} - p_{20}}{1 - a_{20} a_{02}},$$

$$b_3 = \frac{c}{6} \quad (24)$$

$$\bar{a}_{1i} = \frac{a_{1i} - a_{0i} a_{10}}{1 - a_{10} a_{01}},$$

$$\bar{a}_{2j} = \frac{a_{2j} - a_{0j} a_{20}}{1 - a_{20} a_{02}} \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (25)$$

$$\bar{p}_{1i} = \frac{p_{1i} - p_{0i} a_{10}}{1 - a_{10} a_{01}},$$

$$\bar{p}_{2i} = \frac{p_{2i} - p_{0i} a_{20}}{1 - a_{20} a_{02}} \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (26)$$

设 $Q = -(A)^{-1}P$, 由于 A 和 P 都是可逆矩阵, Q 也是可逆矩阵. 令

$$M^{-1}QM = S, M^{-1}U = V, M^{-1}Bg(t) = H \quad (27)$$

其中 S 是一个对角阵, 它的对角线由 Q 的特征值组成. 把式(27)代入式(19)可得

$$\frac{dV}{dt} = SV + H \quad (28)$$

式(28)的解为

$$V_i(t) = e^{S_i t} U_i(0) + \int_0^t e^{S_i(t-\tau)} H_i(\tau) d\tau$$

$$(i = 1, \dots, N) \quad (29)$$

其中 S_i 是 Q 的第 i 个特征值. $H_i(\tau)$ 的值仅与边界点的数值有关, 其积分总有界. 因此在 V 的解中的收敛特性主要取决于 S_i . 只要有一个特征值存在正的实部, 则解就会不断增大而发散. 为了保证计算稳定, 需要保证 Q 的所有特征值都不大于零. 这种稳定性叫渐进稳定性.

Q 的特征值可以通过数值方法求得. 无论 N 取何值, 优化差分格式的特征值都不存在正的实部, 满足渐进稳定性要求. 而 Kim 的格式则不满足此稳定性. 图 6 为 $N = 19$ 时两种格式的特征值谱对比. 从图中可以看出, Kim 格式有存在两个正的特征值.

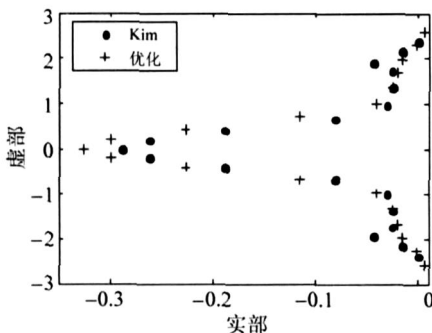


图 6 $N = 19$ 时特征值谱对比

Fig. 6 Eigenvalues spectrum comparison of $N = 19$

4 数值算例

为了检验优化格式的计算精度和稳定性, 本节考虑两个 CAA 标准问题: 一维波对流问题^[12]和二维声波传播问题^[13]. 计算中空间离散分别用优化的差分格式与 Kim 格式对比, 时间积分用 5 步 LDDRK 方法^[3].

4.1 一维波对流模拟

一维波对流的控制方程为式(13), 其中波速 c 设为 1. 初始边界条件如下

$$\begin{cases} u(x, t = 0) = \begin{cases} 1 + 3\sin\left[\frac{2\pi(x - 40\Delta x)}{3\Delta x}\right] \\ \exp\left[-\ln(2)\left(\frac{x - 40\Delta x}{8\Delta x}\right)^2\right] \end{cases} \\ u(x = 0, t) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

计算区域为 $x \in [0, 100\Delta x]$. 初始扰动的归一化功率谱密(PSD)如图 7 所示, 从图 7 可以看出, 计算的最大度量波数接近 0.8π .

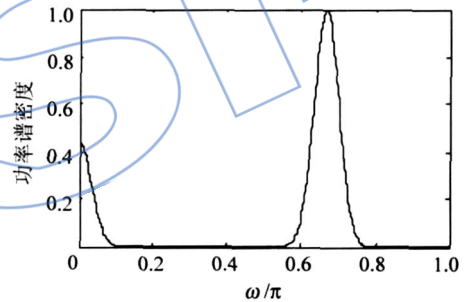


图 7 初始扰动的归一化功率谱密度

Fig. 7 Normalized power spectral densities of the initial disturbances

为了减少时间积分误差对结果的影响, 柯朗数 CFL 取 0.05. 计算中所有量都被标准化: 空间以 Δx 为单位, 时间以 Δt 为单位. 时间 $t = 30$ 时的计算结果对比如图 8 所示. 计算误差 $|u_{\text{calc}} - u_{\text{exact}}|$ 如图 9 所示. 从图 8 和 9 可以看出优化后的差分格式精度有很大提高.

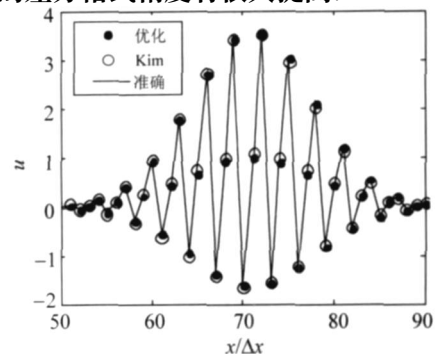


图 8 $t = 30$ 时的计算结果对比

Fig. 8 Solutions comparison at $t = 30$

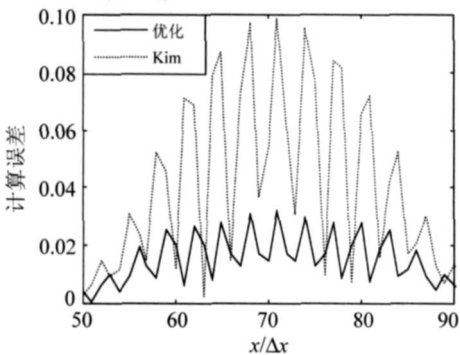


图 9 计算误差对比

Fig. 9 Comparison of the computation errors

4.2 二维声波传播模拟

二维声波传播的控制方程为二维线性欧拉方程,表述为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{31}$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} Ma_x \rho + u \\ Ma_x u + p \\ Ma_x v \\ Ma_x p + u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} Ma_y \rho + v \\ Ma_y u \\ Ma_y v + p \\ Ma_y p + v \end{pmatrix} \tag{32}$$

其中 ρ 和 p 分别表示密度和压力; u 和 v 分别表示 x 和 y 方向的速度; Ma_x 和 Ma_y 分别表示 x 和 y 方向的马赫数. 为了便于计算,所有变量都已无量纲化. 初始条件为

$$\begin{cases} t = 0, & u = v = 0 \\ p = \rho = 0.01 \exp\left[-\ln(2) \frac{x^2 + y^2}{(3\Delta x)^2}\right] \end{cases} \tag{33}$$

计算区域为 $x, y \in [-100\Delta x, 100\Delta x]$; $Ma_x = 0.5$, $Ma_y = 0$. 计算中采用均匀计算网格,即 $\Delta x = \Delta y$,空间以 Δx 为单位,时间以 Δt 为单位, CFL 取为 0.2. 计算区域四周采用理想匹配层 (Perfectly matched layers, PML) 边界^[14].

$t = 20$ 和 50 时的压力云图对比如图 10 所示. 从图上可以看出两种格式都有很好的模拟结果,且很难直接看出二者的差别. 为了进一步比较二者的计算精度,表 4 列出了计算中的 l^2 范数误差. 其中 l^2 范数范数误差定义为

$$E(l^2) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} [p_{num}(i, j) - p_{exact}(i, j)]^2}{NxNy}} \tag{34}$$

从表 4 可以看出,优化后的格式提高了计算精度.

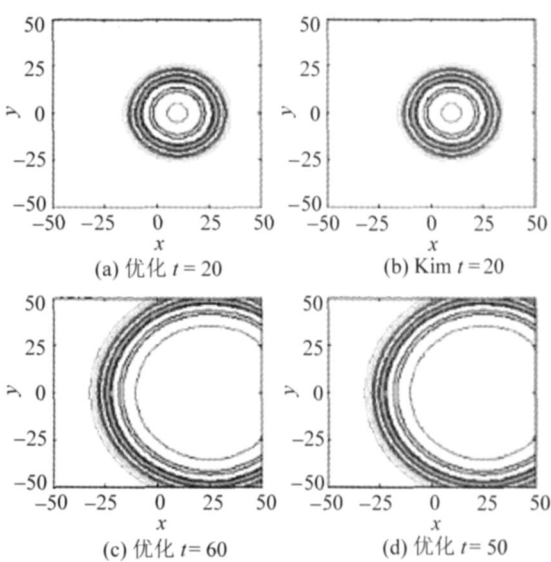


图 10 压力云图对比

Fig. 10 Comparison of the pressure contour

表 4 $l^2 - 2$ 范数误差对比

Table 4 Comparison of $l^2 - 2$ norm error

t	Kim	优化
20	9.2336×10^{-7}	8.0544×10^{-7}
50	1.4882×10^{-6}	1.3383×10^{-6}

5 结 论

根据 DRP 的思想,利用 SQP 方法优化了紧致差分格式. 优化的内部格式具有四阶 Taylor 精度,边界格式具有三阶 Taylor 精度. 优化的格式与以往格式相比,提高了计算精度,完全满足渐进稳定条件. 一维和二维算例体现了改进的性能. 这种优化策略同样可以运用到其它格式的优化.

参考文献:

[1] Tam C K W, Webb J C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics [J]. Journal of Computational Physics, 1993, 107:262-281.
[2] Svard M, Carpenter M H, Nordstrom J. A stable high-order finite difference scheme for the compressible Navier-Stokes equations, far-field boundary conditions [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225:1020-1038.
[3] HU F Q, Hussanini M Y, Manthey Y J L. Low-dissipation and low-dispersion runge-kutta schemes for computational acoustics [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 124:177-191.
[4] Berland J, Bogey C, Marsden O. High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale

- and boundary problems [J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 224:637-662.
- [5] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 103:16-42.
- [6] Sutmann G. Compact finite difference schemes of sixth order for the helmholtz equation [J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 203:15-31.
- [7] Kim J W, Lee D J. Optimized compact finite difference schemes with maximum resolution [J]. *AIAA Journal*, 1997, 34(5):887-893.
- [8] Kim J W, LEE D J. Implementation of boundary conditions for optimized high-order compact schemes [J]. *Journal of Computational Acoustics*, 1997, 5(2):177-191.
- [9] Kim J W. Optimized boundary compact finite difference schemes for computational aeroacoustics [J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 225(1):995-1019.
- [10] Abarbanel S S, Chertock A E. Strictly stability of high-order compact implicit finite-difference schemes: the role of boundary conditions for hyperbolic PDEs [J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 160:42-66.
- [11] 孙国正. 优化设计及应用 [M]. 北京:人民交通出版社,2000.
- SUN Guozheng. Optimization design and application [M]. Beijing: China Communications Press, 2000. (in Chinese)
- [12] Tam C K W. Fourth computational aeroacoustics workshop on benchmark problems [R]. Cleveland, USA: NASA Glenn Research Centre, 2004. 31-32.
- [13] Hardin J C, Ristorcelli J R, Tam C K W. ICASE/LaRC workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics [R]. Virginia, USA: Langley Research Centre, 1994.
- [14] Rahmouni A N. An algebraic method to develop well-posed pml models absorbing layers, perfectly matched layers, linearized euler equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 197(1):99-115.